

Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$

Dans ce problème, on considère un entier $d \in \mathbb{N}^*$ et on note $(e_1, \dots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$. On fixe X une variable aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ dont la loi est donnée par :

$$\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = e_i) = \mathbb{P}(X = -e_i) = \frac{1}{2d}$$

et on considère une suite de variable aléatoires mutuellement indépendantes $(X_n)_{n \geq 1}$ identiquement distribuées suivant la loi de X . L'objectif de ce problème est de s'intéresser à l'asymptotique de la suite de variables aléatoires $(S_n)_{n \geq 0}$, où par définition, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

On dira que la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ est une "marche aléatoire" sur $\mathbb{Z}^d$. On va s'intéresser à la question suivante : quelle est la probabilité que la marche aléatoire $(S_n)_{n \geq 0}$ revienne à l'origine ? Autrement dit, quelle est la probabilité qu'il existe un indice $n > 0$ tel que $S_n = 0$? La marche aléatoire est dite "récurrente" si et seulement si la probabilité de cet événement est 1, c'est à dire si et seulement si elle la marche aléatoire revient presque sûrement à l'origine.

1 Un critère de récurrence

On note T_1 la variable aléatoire donnant le temps de premier retour à l'origine :

$$T_1 = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\} & \text{si cet ensemble est non vide} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout $k \geq 2$, on définit de même le temps de k -ième retour à l'origine par la relation de récurrence suivante :

$$T_k = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid n > T_{k-1}, S_n = 0\} & \text{si cet ensemble est non vide} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note N la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ donnant le nombre de retour à l'origine :

$$N = |\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}|$$

1. a) On note $p = \mathbb{P}(T_1 < +\infty)$. Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{P}(T_{k+1} < +\infty) = p\mathbb{P}(T_k < +\infty)$.

b) En déduire la relation :

$$\mathbb{E}(N) = \begin{cases} \frac{p}{1-p} & \text{si } p \neq 1 \\ +\infty & \text{si } p = 1 \end{cases}$$

2. a) Montrer par ailleurs que :

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$$

b) Conclure que la marche aléatoire est récurrente (c'est à dire qu'on a $T_1 < +\infty$ presque sûrement) si et seulement si la série :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$$

diverge.

2 Récurrence des marches sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}^2$

3. On suppose dans cette question que $d = 1$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$$

b) En déduire que la série de terme général $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$ diverge.

c) Conclure que la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ est récurrente.

Jusqu'à la fin de cette partie, on suppose que $d = 2$.

4. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \frac{1}{4^{2n}} \sum_{k=0}^n \binom{2n}{k} \binom{2n-k}{k} \binom{2n-2k}{n-k}$$

b) Simplifier cette somme en :

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \frac{1}{4^{2n}} \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

c) Par un raisonnement combinatoire, démontrer l'identité suivante pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

5. a) En effectuant un développement asymptotique de $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$, conclure que la série de terme général $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$ diverge.

b) En déduire que la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$ est également récurrente.

3 Caractère non récurrent dans le cas $d \geq 3$

Dans cette section, on suppose $d \geq 3$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}$ de somme égale à n , on note : $\binom{n}{i_1, \dots, i_k} = \frac{n!}{i_1! \dots i_k!}$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer l'identité :

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \frac{1}{(2d)^{2n}} \binom{2n}{n} \sum_{i_1 + \dots + i_d = n} \binom{n}{i_1, \dots, i_d}^2$$

Il s'agit maintenant d'estimer cette somme au voisinage de l'infini. Pour cela, on introduit la fonction Π définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\Pi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt$$

7. a) Vérifier rapidement que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\Pi(n) = n!$.

b) Montrer que $\ln(\Pi)$ est une fonction convexe.

Indication : On pourra dériver Π sous le signe intégral et étudier le signe de $\ln(\Pi)''$

c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, tous $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x_1 + \dots + x_d = x$, on a :

$$\Pi\left(\frac{x}{d}\right)^d \leq \prod_{i=1}^d \Pi(x_i)$$

8. a) Avec ce qui précède, obtenir la majoration :

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) \leq \frac{1}{2^{2n} d^n} \binom{2n}{n} \frac{n!}{\Pi\left(\frac{n}{d}\right)^d}$$

b) En déduire la majoration asymptotique au voisinage de l'infini :

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = O\left(\frac{1}{n^{\frac{d}{2}}}\right)$$

On pourra à cet effet admettre la formule de Stirling généralisée, qui donne l'équivalent suivant au voisinage de l'infini : $\Pi(x) \sim x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x}$

c) Conclure que pour $d \geq 3$, la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ n'est pas récurrente.

4 Divergence à l'infini sur $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$

L'objectif de cette section est de montrer un résultat en apparence plus fort dans le cas $d \geq 3$, à savoir : l'événement $(|S_n| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty)$ est presque sûr (ici, $|\cdot|$ désigne n'importe quelle norme sur $\mathbb{Z}^d$). On suppose donc dans toute cette partie que $d \geq 3$.

Pour toute suite $(A_n)_{n \geq 0}$ d'événements, on note :

$$\limsup(A_n) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k \text{ (une infinité des } A_n \text{ sont vérifiés)}$$

9. a) Montrer l'égalité :

$$(|S_n| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty) = \bigcap_{A \in \mathbb{N}} \overline{(\limsup(|S_n| \leq A))}$$

b) Soit $A \in \mathbb{N}$. Montrer :

$$(\limsup(|S_n| \leq A)) = \bigcup_{\substack{x \in \mathbb{Z}^d \\ |x| \leq A}} (\limsup(S_n = x))$$

c) Conclure que :

$$(|S_n| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty) = \bigcup_{x \in \mathbb{Z}^d} \overline{(\limsup(S_n = x))}$$

10. On fixe maintenant $x \in \mathbb{Z}^d$, et on va montrer que l'événement $(\limsup(S_n = x))$ est négligeable, c'est à dire de probabilité nulle.

On conserve les notations de la partie 1 sur les T_i , p et N , et on note $R_1, \dots, R_k, \dots$ les temps de premiers passages en x , définis par :

$$R_1 = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N} \mid S_n = x\} & \text{si cet ensemble est non vide} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\forall k \geq 2, \quad R_k = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N} \mid n > R_{k-1}, S_n = x\} & \text{si cet ensemble est non vide} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Et on note M le nombre de passages en x :

$$M = |\{n \in \mathbb{N} \mid S_n = x\}|$$

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{P}(R_{k+1} < +\infty) = \mathbb{P}(T_1 < +\infty)\mathbb{P}(R_1 < +\infty) = p\mathbb{P}(R_1 < +\infty)$.

b) Vérifier que sous les hypothèses de cette partie, on a bien $p \neq 1$, et montrer : $\mathbb{E}(M) = \frac{\mathbb{P}(R_1 < +\infty)}{p-1}$.

c) En déduire que $(\limsup(S_n = x))$ est négligeable.

11. Conclure que, sous l'hypothèse $d \geq 3$, on a :

$$\mathbb{P}(|S_n| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty) = 1$$

Blague de probabiliste : Pourquoi ne voit-on jamais d'oiseau bourré ? Car ils sont tous partis à l'infini !